



TITLE:

振動,興奮系における余次元2の分岐(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

坂口, 英継

CITATION:

坂口, 英継. 振動,興奮系における余次元2の分岐(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1987, 48(4): 294-296

ISSUE DATE:

1987-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92633>

RIGHT:

振動，興奮系における余次元 2 の分岐

京大・理 坂 口 英 継

パラメーター 2 つを適当に選ぶと見つかる分岐を余次元 2 の分岐と言う。余次元 1 の分岐より特殊な状況を考えることになるので、重要性が低いといえるかもしれない。しかし余次元 2 の分岐点は余次元 1 の分岐ラインのターミナルになっている場合や中継点となっている場合が多く、系のふるまいを表わす相図の中ではかなめの点となっている。

ここでは振動の発生を表わす Hopf 分岐と振動状態が興奮状態へ遷移する saddle-node 分岐の交差点周辺のふるまいに注目する。神経系の活動度のダイナミクスをモデル化した Wilson-Cowan の方程式を具体的に計算して、定常状態，振動状態，興奮状態の間の遷移のようすを調べる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + f_x(c_1x - c_2y + P) = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -y + f_y(c_3x - c_4y + Q) = G(x, y) \end{cases}$$

x, y はそれぞれ興奮性神経細胞集団，抑制性神経細胞集団の平均発火率で 0 と 1 の間の値をとる。 c_1, c_2, c_3, c_4 は神経細胞間の平均シナプス強度を表わし， P, Q は神経細胞への外からの入力を表わす。 f_x, f_y は入力に対する発火のレスポンスを表わす S 字型関数で今回は， $f_x(z) = f_y(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ を用いた。

まずこの系の定常解，つまり $F(x, y) = 0, G(x, y) = 0$ の解を探す。

$\frac{\partial G}{\partial y} = -1 - c_4 f'_y(c_3x - c_4y + Q) < 0$ なので，曲線 $G(x, y) = 0$ はある関数 $g(x)$ を使って $y = g(x)$ とかける。したがって $F(x, y(x)) = 0$ の解を求めればよいことになる。一変数関数の解の分岐はカタストロフィ理論によって分類されている。例えば， $c_4 = 0$ ， $c_2 = 4\pi^2 c_3^{-3}$ ， $c_1 = \sqrt{2\pi} + \frac{c_2 c_3}{\sqrt{2\pi}}$ ， $P = -\frac{1}{2}(c_1 - c_2)$ ， $Q = -\frac{c_3}{2}$ は蝶のカタストロフィ点である。蝶のカタストロフィの normal form は $z^5 + \mu_3 z^3 + \mu_2 z^2 + \mu_1 z + \mu_0$ と書け，定常解の個数はパラメーターとともに 1 個，3 個，5 個と変ってゆく。

次に定常解の安定性を調べる。通常の方法で定常解のまわりの線形化方程式をつくり，その固有値を求める。2 つの固有値がともに 0 になる分岐点を Arnold-Takens-Bogdanov 分岐点

と呼ぶ。この分岐点で Hopf 分岐と saddle-node 分岐が交わる。蝶のカタストロフィーを生じるパラメータの中でさらに 2 つの固有値がともに 0 になる条件を課すと、 $c_1 = 2\sqrt{2}$, $c_2 = \sqrt{2\pi}$, $c_3 = \sqrt{2\pi}$, $c_4 = 0$, $P = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $Q = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ というパラメータの値が得られる。このパラメータで蝶のカタストロフィーでかつ A. T. B. 分岐という余次元の高い分岐が生じる。この分岐の normal form は

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = (\nu_0 + \nu_1 z + \nu_2 z^2) w + \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 - z^5 \end{cases}$$

となる。 $\nu_0, \nu_1, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ は小さな量で ν_2 は 1 のオーダーの量。この分岐の解析はやっていないがかなり複雑なものになると思われる。Wilson-Cowan モデルは少なくともこの分岐点を 1 つもっているのだから、その相図はかなり複雑なものになる。以下では Wilson-Cowan モデルを数値計算した結果を示す。

図 1 は $c_2 = 4.0$, $c_3 = 10.0$, $c_4 = 0$, $Q = -4.5$ と固定して c_1 と P を変えた時の相図である。3 つのカusp c' , c'' , c''' から 2 つずつ saddle-node 分岐ラインが出てくる。 c' と c'' から出ている saddle-node ラインにはさまれている領域では定常解の数は 3 つで、それらが互いに重なっている領域では定常解の数は 5 つである。saddle-node 分岐ラインと Hopf 分岐ライン (H) が接している点が A. T. B. 分岐点である。この A. T. B. 分岐点からはさらにホモクリニック分岐のラインが出てくる。Hopf 分岐で生じたリミットサイクルがホモクリニック分

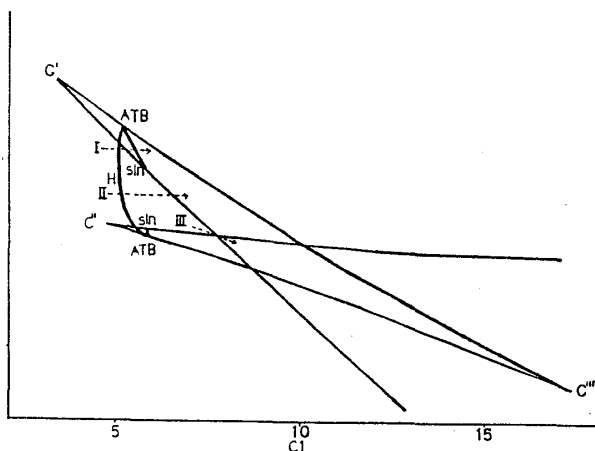


図 1

I $\cdot \rightarrow \circ \rightarrow \circ^* \rightarrow \bigcirc \rightarrow \cdot$

II $\cdot \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc^*$

III $\cdot \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc^*$

\cdot focus
 \circ node
 \times saddle
 \bigcirc limit cycle

図 2

岐でサドルのマニフォールドと接して、リミットサイクルが消滅する。ホモクリニック分岐ライン (saddle-loop 分岐ともいう) が saddle-node 分岐ラインと交わる点は saddle-loop-node 分岐点 (sln) と呼ばれる。この分岐点より相図の右側にある saddle-node 分岐ではリミットサイクルの周上で saddle と node が対生成する。その時生じる node はわずかなずれに対しては安定だが、ある程度ずれが大きいともとのリミットサイクルにそって一周してから node に近づく。この意味で saddle-loop-node 分岐点の右側の saddle-node 分岐の近くでは系は興奮状態にあるといえる。図 2 に図 1 の中に描いた線にそってパラメーターを動かした時のふるまいの概略を示す。単安定、双安定、振動状態、興奮状態の遷移のようすがわかる。

エントロピーとコンプレキシティ

大阪市大・理 釜 江 哲 朗

無秩序さを表す量としてのエントロピーは、確率分布に対する量であるため、観測された現象に対して適用するには、確率空間の設定が必要となる。この意味で、エントロピーは現象の無秩序さを直接表現しうる量とはいえない。コンプレキシティ (complexity) は、対象のもつ論理的な複雑さを表現する量として、1960 年代に A. N. Kolmogorov と G. J. Chaitin によって導入された。それは、現象の無秩序さのより直接的な表現となっている。

考察の対象とするものの全体を W とする。 W は以下の N 及び D を含むものとする。 W の各元は、一定の手続きで番号付け可能なものとする。この番号付けによって、 W は $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ と一対一に対応する。この対応によって、 N 上の計算可能性に関する概念が W 上に移される。長さ有限な 0 と 1 の列の全体を D とする。 D の元 ξ の長さを $L(\xi)$ と書く。 $W \times D$ から W への部分的に計算可能な関数 f を考える。ここで、関数 $f(x, \xi)$ が部分的に計算可能であるとは、入力 $(x, \xi) \in W \times D$ に対して出力 $f(x, \xi) \in W$ を計算する手続きが存在することをいう。この手続きの概念は数学的に明確にされねばならないが、ここでは、計算機のプログラムを思い浮べることにしよう。入力 (x, ξ) に対して、計算が完了しない場合もある。このようなとき、 $f(x, \xi)$ は定義されてないものとする。「部分的に」というのは、関数 f の定義域が $W \times D$ の全体とは限らないことを意味する。

W の元 x, y に対して、 x を与えた上での y の f -コンプレキシティを